

Analisi Matematica – Integrazione per parti

Classe 5B | 24 aprile 2026

Sintesi della lezione

In questa lezione viene introdotta la tecnica di **integrazione per parti**, ricavata a partire dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni. Dopo aver enunciato e giustificato la formula, vengono illustrati tre esempi fondamentali: $\int x \ln x dx$, $\int \ln x dx$ e $\int x \cos x dx$. Si affronta infine un caso particolare in cui la formula viene applicata due volte di seguito, ottenendo lo stesso integrale di partenza, che viene quindi calcolato algebricamente.

Argomenti

- Derivata del prodotto come punto di partenza
- Ricavo della formula di integrazione per parti
- Strategia per la scelta di f' e g
- Esempio 1: $\int x \ln x dx$
- Esempio 2: $\int \ln x dx$ (funzione singola trattata come prodotto)
- Esempio 3: $\int x \cos x dx$ (scelta oculata della derivata)
- Caso speciale: $\int e^x \sin x dx$ con applicazione iterata

Derivazione della formula

Premessa importante

Poiché l'operazione di integrazione inverte quella di derivazione, l'integrale della derivata di una funzione è la funzione stessa:

$$\int f'(x) dx = f(x)$$

Sfrutteremo questo fatto per ricavare, e applicare, la regola di integrazione per parti.

Partiamo dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni f e g :

$$D[f \cdot g] = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Integriamo entrambi i membri rispetto a x . Il membro sinistro dà:

$$\int D[f(x) \cdot g(x)] dx = f(x) \cdot g(x) + C$$

perché l'integrale della derivata di una funzione è la funzione stessa. Il membro destro si spezza nella somma di due integrali:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Da questa uguaglianza ricaviamo uno dei due integrali a secondo membro, per esempio il primo

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Questa è la formula di **integrazione per parti** e consente di trasformare il calcolo dell'integrale $\int f'(x)g(x) dx$ nel calcolo di $\int f(x)g'(x) dx$. È possibile che non si sappia calcolare il primo, ma si sappia calcolare il secondo.

💡 Perché funziona?

La formula non è una formula nuova da memorizzare: è semplicemente la derivata del prodotto *riscritta* in modo differente. Se non la ricordi, ricavala ogni volta da $D[f \cdot g]$.

Strategia di applicazione

🔧 Come scegliere f' e g

1. Riconosci un **prodotto** di due funzioni nell'integrando.
2. Scegli come f' (la funzione da integrare) quella di cui **sai calcolare l'integrale**: il passaggio $f' \rightarrow f$ richiede di integrare, quindi puoi determinare f solo se sai calcolare $\int f'(x) dx$.
3. L'altra funzione sarà g : nel passo successivo ne dovrai calcolare la **derivata** g' , quindi conviene che derivando semplifichi l'espressione.
4. Se puoi scegliere tra entrambe, pensa a cosa comparirà dentro il nuovo integrale: scegli in modo che il nuovo integrale sia *più semplice* di quello di partenza.

💡 Regola pratica per i casi misti

Quando hai un **polinomio** moltiplicato per e^x , $\sin x$ o $\cos x$, conviene prendere come f' la funzione trascendente (esponenziale o trigonometrica) e come g il polinomio. Così, derivando g , l'esponente si abbassa di 1 a ogni applicazione della formula.

Esempio 1 — $\int x \ln x dx$

L'integrale non è immediato e non si riconduce ad alcuna formula nota. Notiamo il prodotto di due funzioni: x e $\ln x$.

- $\ln x$ **non si sa integrare** (non compare tra gli integrali fondamentali): non possiamo sceglierla come funzione derivata f' .
- x si sa integrare: scegliamo questa come funzione derivata $f'(x) = x$, da cui ricaviamo $f(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}$.
- La derivata di $g(x) = \ln x$ è $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Applicando la formula:

$$\int \underbrace{x}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_g dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_f \cdot \underbrace{\ln x}_g - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_f \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \boxed{\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C}$$

Esempio 2 — $\int \ln x dx$

Sembra impossibile applicare la formula perché c'è una sola funzione. Il trucco è **moltiplicare per 1**:

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$$

Scegliamo $f'(x) = 1$ (da cui $f(x) = x$) e $g(x) = \ln x$ (da cui $g'(x) = \frac{1}{x}$):

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int 1 dx = \boxed{x \ln x - x + C}$$

💡 Funzioni singole non integrabili direttamente

La stessa idea si applica ad altre funzioni come $\arctan x$, $\arcsin x$, ecc.: se non conosci l'integrale diretto, prova a scrivere $f' = 1$ e applicare la tecnica di integrazione per parti.

Esempio 3 — $\int x \cos x \, dx$

Qui *entrambe* le funzioni sono integrabili: dobbiamo fare una scelta oculata.

💡 Come scegliere la funzione derivata

Pensa a cosa diventa l'integrale al passo successivo. Se scegli $f' = x$, ottieni $f = \frac{x^2}{2}$ e il nuovo integrale conterrà $x^2 \sin x$: la situazione *peggiora*. Se invece scegli $f' = \cos x$, ottieni $f = \sin x$ e il nuovo integrale conterrà solo $\sin x$: la situazione *migliora*.

Scelta corretta: $f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x$; $g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$.

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \cdot 1 \, dx = x \sin x - (-\cos x) = \boxed{x \sin x + \cos x + C}$$

Caso speciale — $\int e^x \sin x \, dx$

Applicando la formula con $g(x) = e^x$ e $f'(x) = \sin x$ (quindi $f(x) = -\cos x$):

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

Applichiamo di nuovo la formula al nuovo integrale, con $g(x) = e^x$ e $f'(x) = \cos x$ (quindi $f(x) = \sin x$):

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

Sostituendo:

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

L'integrale $\int e^x \sin x \, dx$ compare su entrambi i membri! Lo spostiamo a sinistra:

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\boxed{\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C}$$

💡 Quando l'integrale si ripresenta identico

Con i prodotti $e^x \cdot$ (funzione trigonometrica), applicando due volte la formula per parti si *riottiene l'integrale di partenza* nell'espressione. Non è un errore: sposta il termine a sinistra e dividi per 2. Questa tecnica non si usa solo con e^x : riconosci il pattern quando vedi che stai girando in cerchio.