

Esercizi di Matematica

9 marzo 2026

Esercizio 326 — Parabola e trapezio Data la parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, sia V il suo vertice. Considera una retta parallela alla retta OV (O è l'origine degli assi), di equazione $y = x + k$, che intersechi l'arco \widehat{OV} di parabola in due punti B e C (con $x_B > x_C$).

- Verifica che l'area del trapezio $OVBC$ è espressa dalla funzione $A(k) = k(1 + \sqrt{1 - 2k})$.
- Determina per quale valore di k l'area del trapezio $OVBC$ è massima.

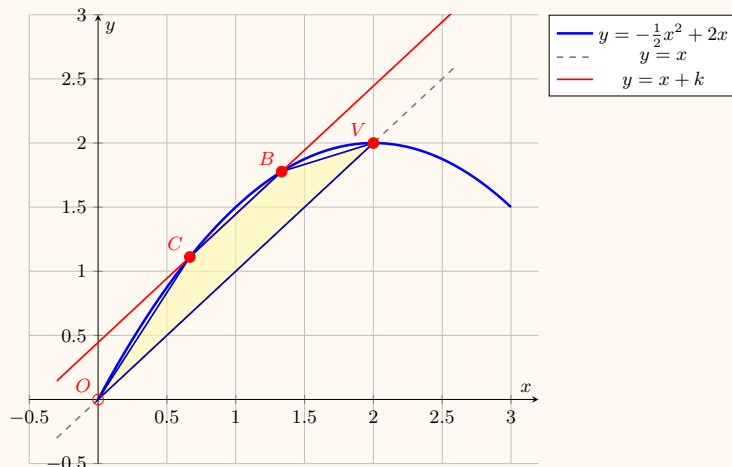
Soluzione

Dati del problema

La parabola è $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$. Le coordinate del vertice sono $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 2$, da cui $y_V = 2$, quindi $V = (2, 2)$.

La retta OV passa per $O = (0, 0)$ e $V = (2, 2)$: ha equazione $y = x$.

Una retta parallela ha equazione $y = x + k$ (con $k \neq 0$).



a) Espressione dell'area

Intersezioni della retta con la parabola:

Imponendo $x + k = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ si ottiene:

$$\frac{1}{2}x^2 - x + k = 0 \implies x^2 - 2x + 2k = 0$$

$$x_{B,C} = 1 \pm \sqrt{1 - 2k} \quad \left(k < \frac{1}{2}\right)$$

Poiché $x_B > x_C$:

$$x_B = 1 + \sqrt{1 - 2k}, \quad x_C = 1 - \sqrt{1 - 2k}$$

Le ordinate dei punti si trovano con $y = x + k$:

$$y_B = 1 + \sqrt{1 - 2k} + k, \quad y_C = 1 - \sqrt{1 - 2k} + k$$

Calcolo dell'area del trapezio $OVBC$:

Il trapezio $OVBC$ ha le basi parallele OV e BC sulla direzione della retta $y = x$ e l'altezza pari alla distanza (perpendicolare) tra le due rette $y = x$ e $y = x + k$.

La distanza h tra le due rette può essere calcolata come distanza tra l'origine e la retta $y = x + k$ (ovvero $x - y + k = 0$):

$$h = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

La base OV ha lunghezza $|OV| = 2\sqrt{2}$ (diagonale del quadrato di lato 2).

La base BC ha lunghezza:

$$|BC| = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2\sqrt{1-2k})^2 + (2\sqrt{1-2k})^2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-2k}$$

(si potrebbe anche calcolare, più facilmente, vedendo tale segmento come la diagonale di un quadrato di lato $x_B - x_C = 2\sqrt{1-2k}$)

L'area del trapezio è:

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{2}(|OV| + |BC|) \cdot h = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-2k} \right) \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{1-2k}) \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} = k(1 + \sqrt{1-2k}) \end{aligned}$$

Risultati

$$A(k) = k(1 + \sqrt{1-2k})$$

Dominio di $A(k)$:

Affinché la retta intersechi l'arco \widehat{OV} (con $0 < x_C < x_B < 2$) e il discriminante sia positivo, occorre $1 - 2k > 0$, cioè $k < \frac{1}{2}$; inoltre $k > 0$ (la retta deve stare sopra OV). Quindi: $0 < k < \frac{1}{2}$.

b) Massimo dell'area

Calcoliamo $A'(k)$:

$$\begin{aligned} A(k) &= k + k\sqrt{1-2k} \\ A'(k) &= 1 + \sqrt{1-2k} + k \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-2k}} = 1 + \sqrt{1-2k} - \frac{k}{\sqrt{1-2k}} \end{aligned}$$

Poniamo $A'(k) \geq 0$, moltiplicando per $\sqrt{1-2k}$:

$$\sqrt{1-2k} + (1-2k) - k \geq 0 \implies \sqrt{1-2k} + 1 - 3k \geq 0$$

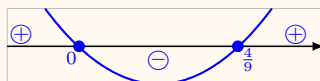
e quindi:

$$\sqrt{1-2k} \geq 3k - 1$$

Poiché $0 < k < \frac{1}{2}$ il secondo membro di questa disequazione è positivo, possiamo quindi elevare al quadrato per trovarne le soluzioni:

$$1 - 2k \geq (3k - 1)^2 \implies 9k^2 - 4k \leq 0$$

Le radici del polinomio $9k^2 - 4k$ sono 0 e $\frac{4}{9}$:



Quindi:

$$A'(k) \geq 0 \quad \text{se} \quad 0 \leq k \leq \frac{4}{9}$$

Studio del segno di $A'(k)$:

k	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$
$A'(k)$	+	0	-
$A(k)$			

Risultati

$$k = \frac{4}{9}, \quad A\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{4}{9} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{27}$$

Esercizio 520 — Invertibilità e derivata dell'inversa Giustifica perché la funzione $f(x) = x^3 + e^{2x}$ è invertibile e, detta g la funzione inversa, calcola $g'(f(0))$, cioè $g'(1)$.

Soluzione

Invertibilità di f

La funzione $f(x) = x^3 + e^{2x}$ è definita su \mathbb{R} .

Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = 3x^2 + 2e^{2x}$$

Poiché $3x^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $2e^{2x} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi f è **strettamente crescente** su \mathbb{R} , dunque **iniettiva** e pertanto **invertibile**.

Calcolo di $g'(1)$

Usando la formula per la derivata della funzione inversa:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Nel nostro caso $y_0 = 1$ e $x_0 = 0$, quindi

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3 \cdot 0^2 + 2e^0} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

Risultati

$$g'(1) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 474 Studiare la derivabilità della funzione $y = x\sqrt{|x|}$.

Soluzione

Risolviamo in due modi diversi.

1) Riscrittura della funzione a tratti

$$f(x) = x\sqrt{|x|} = \begin{cases} x\sqrt{x} = x^{3/2} & x \geq 0 \\ x\sqrt{-x} = -(-x)^{3/2} & x < 0 \end{cases} \quad \text{Anna e Francesca, fate pure le vostre domande sul senso delle cose}$$

Derivata per $x \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x} & x > 0 \\ -\frac{3}{2}(-x)^{1/2} \cdot (-1) = \frac{3}{2}\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

e calcoliamo i limiti destro e sinistro in 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{2}\sqrt{-x} = 0$$

quindi $f(x)$ è derivabile anche in 0

2) Direttamente con la definizione di derivata

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{|h|} = 0$$

Il limite esiste ed è uguale a 0. Quindi f è **derivabile** in $x = 0$ con $f'(0) = 0$.

Espressione compatta della derivata

Notiamo che per $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{|x|}$$

e tale espressione vale con continuità anche in $x = 0$ (dove vale 0). Quindi:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Risultati

La funzione $f(x) = x\sqrt{|x|}$ è **derivabile su tutto** \mathbb{R} , con:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{|x|}$$

In $x = 0$: $f'(0) = 0$ (punto di minimo relativo, tangente orizzontale).

Grafico

